Rallye mathématique du Centre

Épreuve officielle - 2°

Mardi 20 mars 2012

Formule « Groupes » Exercices 0, 1, 2, 3 et 7

Formule « Classes » Exercices 0 à 8

Il est rappelé que toute réponse devra être accompagnée d'une justification.
Les solutions partielles seront examinées.

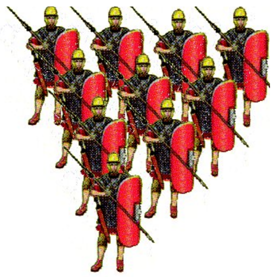
Exercice n°0 Questionnaire culturel

12 points

Compléter les deux feuilles annexes, l'ensemble est à rendre avec les feuilles réponses.

Exercice n°1 Formez les rangs !

5 points



Lors d'une bataille de l'antiquité, les légionnaires constituant l'armée romaine auraient pu se mettre en formation carrée aussi bien qu'en formation triangulaire. Sachant que l'armée compte plus de 10 000 hommes, combien de légionnaires romains ont participé à cette bataille ?

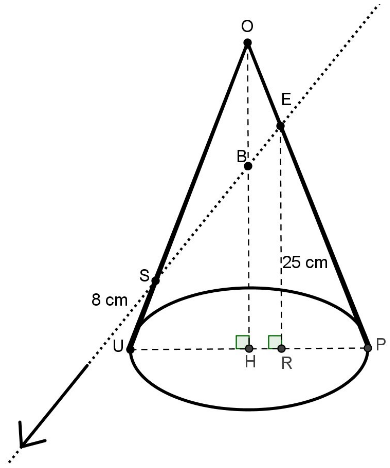
Exercice n°2 Quand Cupidon s'emmêle...

12 points

Pipo est un clown triste, un de ces clowns blancs avec son chapeau en forme de cône. Sarah est une trapéziste amoureuse de Pipo. Mais Pipo est trop triste pour être amoureux. Cupidon a donc décidé de lui décocher une de ses célèbres flèches. Malheureusement, Cupidon a raté sa cible et la flèche a traversé le chapeau du clown. Elle est entrée dans le chapeau en E, a traversé la hauteur en B et est ressortie en S.

La hauteur OH du cône est de 30 cm.
La rayon du disque de base est de 10 cm.
La longueur ER est de 25 cm.
La longueur US est de 8 cm.

Calculer les longueurs OE et OS.
Dessiner à l'échelle $\frac{1}{4}$ le patron du chapeau, puis placer correctement dessus les points E et S.



Exercice n°3 — Cinq colonnes à la une

8 points

Les nombres entiers strictement supérieurs à 1 sont rangés dans cinq colonnes selon le principe ci-dessous :

	a	b	c	d	e
1ère ligne	2	3	4	5	
2ème ligne		9	8	7	6
3ème ligne	10	11	12	13	
4ème ligne		17	16	15	14

Le nombre 13 est situé dans la 3ème ligne, colonne d.

En continuant le principe énoncé ci-dessus, où se situe :

1. le nombre 2012 ?
2. le nombre 1002 ?
3. le nombre 747 ?

Exercice n°4 — Le Carré de POLYBE

5 points

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I	J
3	K	L	M	N	O
4	P	Q	R	S	T
5	U	V	X	Y	Z

Polybe, un historien grec (vers 200 – 125 av. J.-C.), est à l'origine du premier procédé de chiffrement par substitution. C'est un système de transmission basé sur un carré de 25 cases. Chaque lettre peut être ainsi représentée par un groupe de deux chiffres : celui de sa ligne suivi de celui de sa colonne.
Ainsi : "E" = 15, "U" = 51, "N" = 34 ...

Mais ce codage est peut-être un peu simple. On décale alors l'alphabet avec un mot de passe... Par exemple, si le mot de passe est ELECTRICITE, on commence à remplir le carré avec les lettres de ce mot, en ne gardant que la première occurrence de chaque lettre, ce qui donne E L C T R I, puis on complète le tableau avec les lettres inutilisées dans l'ordre alphabétique.
(voir ci-contre)
Le W n'est pas utilisé. Au besoin, on emploie le V à sa place.

	1	2	3	4	5
1	E	L	C	T	R
2	I	A	B	D	F
3	G	H	J	K	M
4	N	O	P	Q	S
5	U	V	X	Y	Z

Que se cache-t-il derrière le message chiffré ci-dessous ? Pour le découvrir, il faut le SESAME.

4115321221453123424412143112442212341321341311112

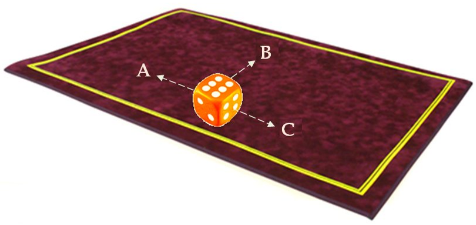
Exercice n°5 — Le dé qui roule

8 points

Un dé est dans la position initiale ci-contre.
Pour les dessins demandés, on utilisera le même type de représentation.

On enchaîne sur ce dé, à partir de cette position initiale, certaines opérations successives de basculement. Ces opérations sont déterminées par la valeur apparue sur la face supérieure du dé.
Ainsi si cette face supérieure indique :

- 1, alors on bascule le dé en direction de A, une fois ;
- 2, alors on bascule le dé en direction de A, deux fois ;
- 3, alors on bascule le dé en direction de B, une fois ;
- 4, alors on bascule le dé en direction de B, deux fois ;
- 5, alors on bascule le dé en direction de C, une fois ;
- 6, alors on bascule le dé en direction de C, deux fois.



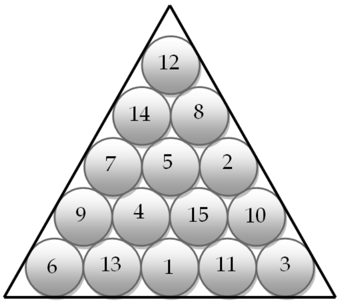
1. Dessiner le dé dans sa position initiale puis après la première application du procédé et ensuite pour les onze applications suivantes. Effectuer la somme des treize faces supérieures représentées précédemment.
2. On continue le procédé, jusqu'à ce que la somme des faces supérieures soit égale à 2012.
   Dessiner alors le dé dans cette dernière position.

Indication : la somme des nombres indiqués sur deux faces opposées d'un dé vaut toujours 7.

Exercice n°6 — Good game!

5 points

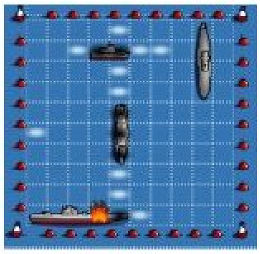
This figure on the right represents 15 snooker balls enclosed in their wooden triangle.
The diameter of the balls is of 57 mm.
How much does the side of the triangle measure?



Exercice n°7 — Touché, coulé !

8 points

Pierre et Léa jouent à la bataille navale, chacun dispose d'un plateau se composant de 100 cases carrées. Elles sont repérées horizontalement de A à J et verticalement de 1 à 10.
Ils disposent chacun d'un bateau qu'ils placent horizontalement ou verticalement.

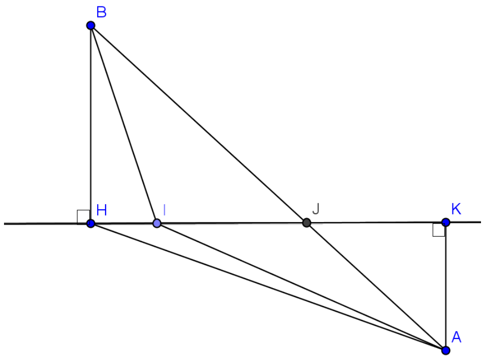


1. Lors de la première partie, ils jouent chacun avec un bateau de 2 cases.
   (a) Léa place son bateau. Pierre choisit au hasard une case.
   Quelle est la probabilité qu'il touche le bateau au premier coup ?
   (b) Pierre a touché le bateau de Léa en $E5$. Il a le droit de rejouer. Si Pierre joue "intelligemment", nommer précisément les cases qu'il doit viser pour toucher l'autre partie du navire et donc le couler ?
   (c) Maintenant, c'est Léa qui tente de couler le bateau de Pierre. Léa touche aussi à son premier essai le navire de Pierre. Celui-ci lui dit qu'en jouant intelligemment, elle a 1 chance sur 2 de le couler.
   Quelles sont les positions possibles du bateau ?
2. Lors de la seconde partie, ils jouent chacun avec un bateau de longueur 3 cases.
   Léa a touché le bateau de Pierre en $B2$.
   Nommer les cases qu'elle doit choisir en priorité pour avoir le plus de chances de le toucher à nouveau.

Exercice n°8 — Le maître nageur

12 points

Un maître nageur s'entraine au sauvetage. Il est sur la plage et surveille la baignade dans un lac séparé de la plage par un muret rectiligne. Il est en A, à 6 m de ce muret (AK = 6 m) et doit rejoindre au plus vite une bouée située en B, à 9 m du muret (BH = 9 m) et à 20 m sur la gauche de A (HK = 20 m). Il nage à la vitesse d'un mètre par seconde et il court sur le sable quatre fois plus vite qu'il ne nage.



1. Il se dit d'abord qu'il ira plus vite en passant par H que s'il allait en B en ligne droite, coupant [HK] en J.
   A-t-il raison ?
2. Puis il se dit que peut-être, en passant entre H et K par I tel que HJ = 4×HI, il ira encore plus vite. Est-ce vrai ?
3. N'y a-t-il pas un trajet encore plus rapide ? Si oui, préciser la position correspondante du point M, entre H et K.